

**Performances en régime dynamique (transitoire)**
**Exercice n°1**

Pour chacun des systèmes suivants du 1<sup>er</sup> ordre, calculez les réponses indicielles, puis  $t_r$  et  $t_s$  à 5% :

$$G_1(p) = \frac{5}{p+5} \quad ; \quad G_2(p) = \frac{20}{p+20}$$

**Exercice n°2**

Pour chacun des systèmes suivants du 2<sup>ème</sup> ordre, calculez  $\xi$ ,  $\omega_n$ ,  $t_p$ ,  $t_r$ ,  $t_s$  à 5% et  $d\%$  :

$$G_1(p) = \frac{120}{p^2 + 12p + 120} \quad ; \quad G_2(p) = \frac{0.01}{p^2 + 0.002p + 0.01}$$

**Exercice n°3**

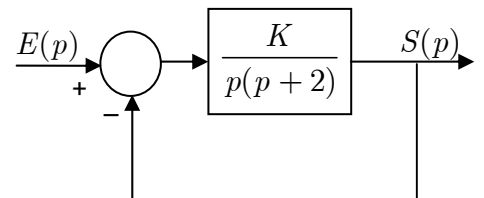
Pour chacun des systèmes du 2<sup>ème</sup> ordre dont les caractéristiques sont mentionnées ci-dessous, calculez la position des paires de pôles :

a)  $d\% = 10\%$  ,  $t_s$  à 2% = 0.5 s

b)  $d\% = 15\%$  ,  $t_p = 0.25$  s

**Exercice n°4**

Soit le système à retour unitaire suivant :



Calculez K afin d'assurer un dépassement  $d\% \leq 10\%$  sur la réponse indicielle.

**Exercice n°5**

Soit le système à retour unitaire dont la FTBO est :  $FTBO(p) = \frac{K}{p(p+20)}$

- Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement critique.
- Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement idéal ( $\beta = 45^\circ$ ).

**Performances en régime dynamique (transitoire)**
**Exercice n°1**

Système du 1<sup>er</sup> Ordre :  $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$

Si  $E(p) = \frac{1}{p}$  (entrée échelon), alors :

$$S(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)} \Rightarrow s(t) = K \left( 1 - e^{-t/T} \right) \quad (\text{Réponse indicielle})$$

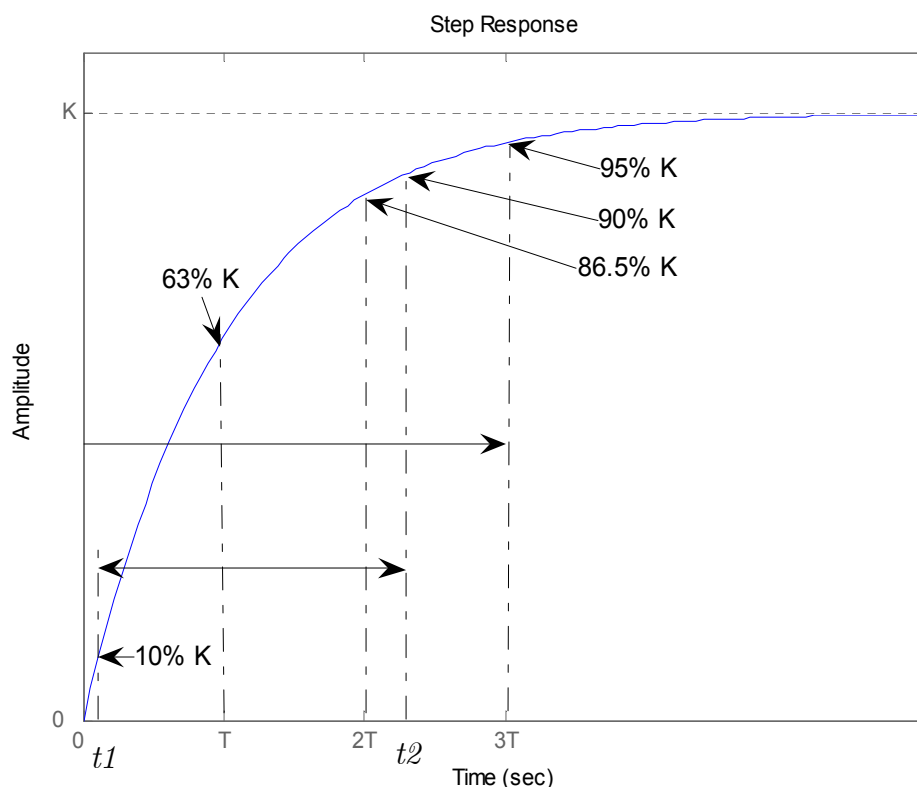
- Temps de montée ( $t_r$ , time rise) : Temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur maximale :

$$\begin{cases} s(t_1) = K \left( 1 - e^{-t_1/T} \right) = 10\% K & \Rightarrow t_1 = 0.11 T \\ s(t_2) = K \left( 1 - e^{-t_2/T} \right) = 90\% K & \Rightarrow t_2 = 2.3 T \end{cases}$$

$$t_r = t_2 - t_1 = 2.3 T - 0.11 T \Rightarrow t_r \approx 2.2 T$$

- Temps d'établissement ( $t_s$  à 5%, settling time) ou encore Temps de réponse : Temps nécessaire pour atteindre 95% de la valeur maximale :

$$s(t_s) = K \left( 1 - e^{-t_s/T} \right) = 95\% K \Rightarrow t_s \text{ à } 5\% = 3 T$$



Réponse indicielle d'un système du 1<sup>er</sup> Ordre

Pour chacun des systèmes suivants du 1<sup>er</sup> ordre, calculons  $t_r$  et  $t_s$  à 5% :

$$\text{a) } G_1(p) = \frac{5}{p+5} = \frac{1}{1+\frac{p}{5}} \quad T = 1/5 \text{ s} \quad t_r \approx 0.44 \text{ s} \quad t_s \text{ à } 5\% = 0.6 \text{ s}$$

$$\text{b) } G_2(p) = \frac{20}{p+20} = \frac{1}{1+\frac{p}{20}} \quad T = 1/20 \text{ s} \quad t_r \approx 0.11 \text{ s} \quad t_s \text{ à } 5\% = 0.15 \text{ s}$$

### Exercice n°2

Système du 2<sup>ème</sup> Ordre :  $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2}$

Si  $E(p) = \frac{1}{p}$  (entrée échelon), alors :

$$S(p) = \frac{K}{p \left( 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2 \right)} \Rightarrow s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)] \quad (\text{Réponse indicielle, voir polycopié de cours})$$

- Temps de montée ( $t_r$ , time rise) : Temps nécessaire pour passer de 0% à 100% de la valeur maximale :

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_p}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ \beta = \arctg\left(\frac{\omega_p}{\sigma}\right) = \arctg\left(\frac{\omega_p}{\xi \cdot \omega_n}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right) \end{cases}$$

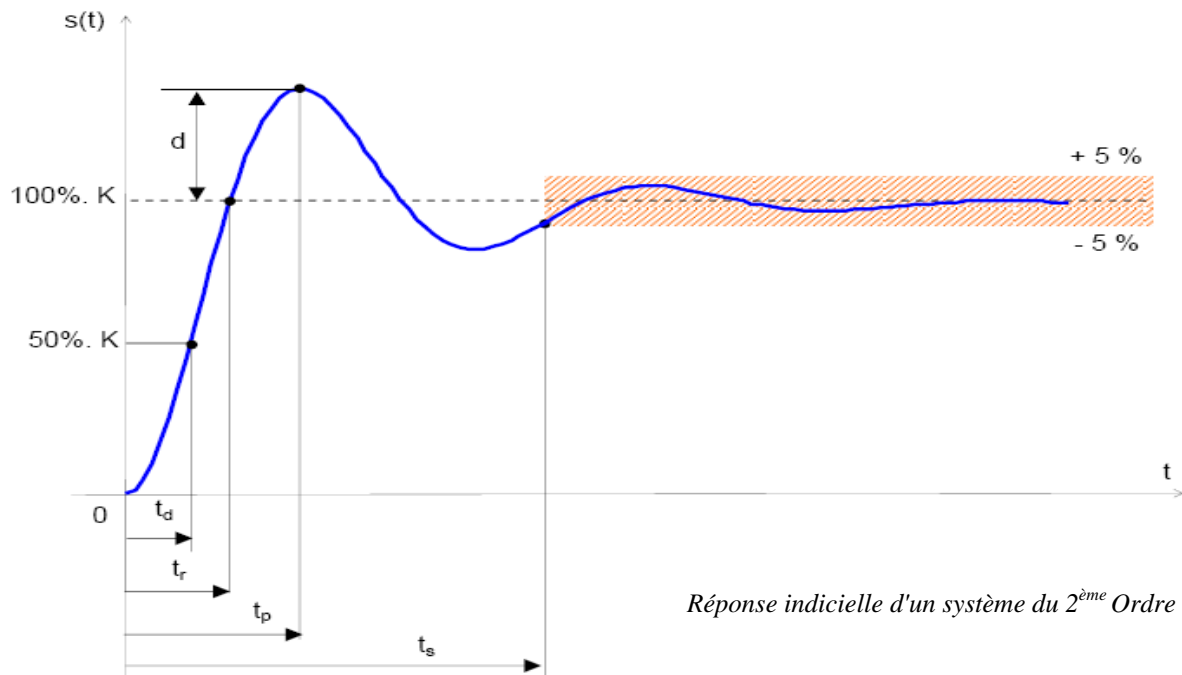
- Temps de pic :  $t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$

- Dépassement :  $d\% = e^{-\pi \left( \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)} \cdot 100\%$

- Temps d'établissement ( $t_s$  à 5%, settling time) ou encore Temps de réponse : Temps nécessaire pour atteindre 95%

de la valeur maximale :  $t_s \text{ à } 5\% = 3 \frac{1}{\sigma} = 3 \frac{1}{\xi \cdot \omega_n}$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ \beta = \arctg\left(\frac{\omega_p}{\sigma}\right) = \arctg\left(\frac{\omega_p}{\xi \cdot \omega_n}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right) \end{cases}$$

Réponse indicielle d'un système du 2<sup>ème</sup> Ordre

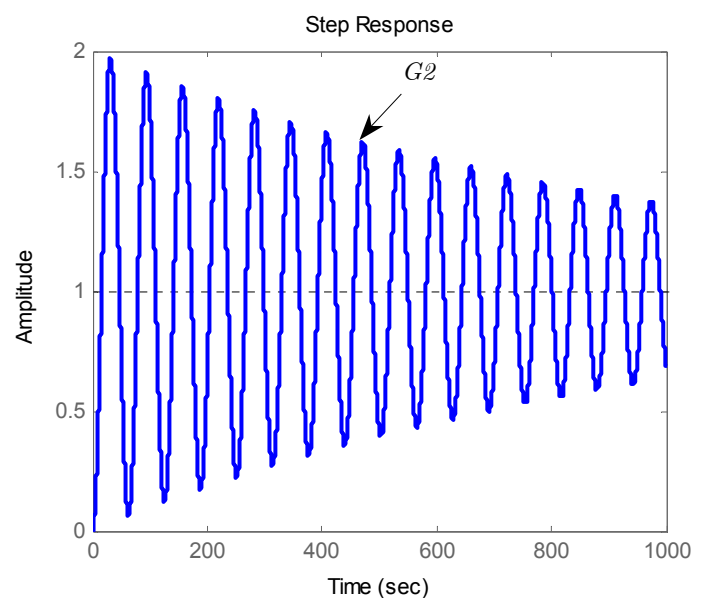
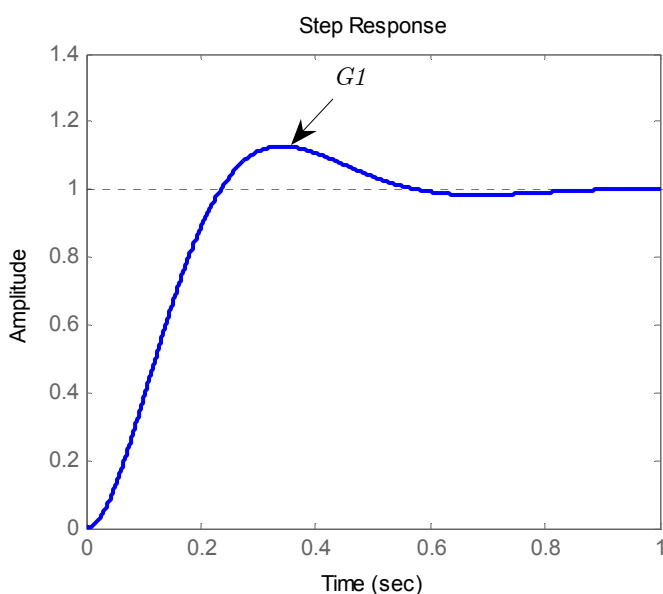
Pour chacun des systèmes suivants du 2<sup>ème</sup> ordre, calculons  $\xi$ ,  $\omega_n$ ,  $t_p$ ,  $t_r$ ,  $t_s$  à 5% et  $d\%$  :

$$\text{a) } G_1(p) = \frac{120}{p^2 + 12p + 120} = \frac{1}{1 + \frac{1}{10}p + \frac{1}{120}p^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = 0.548 \\ \omega_n = 10.95 \text{ rd/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = 0.235 \text{ s} \\ t_p = 0.343 \text{ s} \end{cases} \quad \begin{aligned} t_s \text{ à } 5\% &= 0.5 \text{ s} \\ d\% &= 12.78\% \end{aligned}$$

$$\text{b) } G_2(p) = \frac{0.01}{p^2 + 0.002p + 0.01} = \frac{1}{1 + 0.2p + 100p^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = 0.01 \\ \omega_n = 0.1 \text{ rd/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = 15.8 \text{ s} \\ t_p = 31.4 \text{ s} \end{cases} \quad \begin{aligned} t_s \text{ à } 5\% &= 3.10^3 \text{ s} = 50 \text{ mn !!!} \\ d\% &= 96.9\% \end{aligned}$$



**Exercice n°3**

Pour chacun des systèmes du 2<sup>ème</sup> ordre dont les caractéristiques sont mentionnées ci-dessous, calculons la position des paires de pôles :

a)  $d\% = 10\%$  ,  $t_s \text{ à } 2\% = 0.5 \text{ s}$

Les pôles du système sont complexes conjugués (système oscillatoire amorti) :

$$\Rightarrow p_{1,2} = -\omega_n \left( \xi \pm j\sqrt{1-\xi^2} \right)$$

$$d\% = e^{-\pi \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)} \cdot 100\% = 10\% \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.59$$

$$t_s \text{ à } 2\% = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 13.56 \text{ rd / s}$$

D'où :  $p_{1,2} = -8 \pm j10.95$

b)  $d\% = 15\%$  ,  $t_p = 0.25 \text{ s}$

Les pôles du système sont complexes conjugués (système oscillatoire amorti) :

$$\Rightarrow p_{1,2} = -\omega_n \left( \xi \pm j\sqrt{1-\xi^2} \right)$$

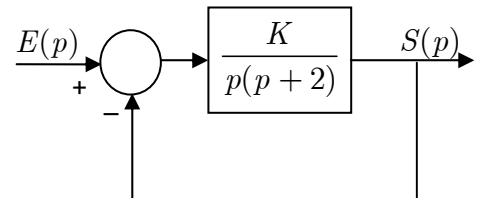
$$d\% = e^{-\pi \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)} \cdot 100\% = 15\% \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.52$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.25 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 14.72 \text{ rd / s}$$

D'où :  $p_{1,2} = -7.65 \pm j12.57$

**Exercice n°4**

Soit le système à retour unitaire suivant :



Calculons K afin d'assurer un dépassement  $d\% \leq 10\%$  sur la réponse indicielle.

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K}{p(p+2)}}{1 + \frac{K}{p(p+2)}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{K}p + \frac{1}{K}p^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{2}{K} \\ \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1}{K} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{K}} \\ \omega_n = \sqrt{K} \end{cases}$$

Nous voulons :  $d\% = e^{-\pi \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)} \cdot 100\% \leq 10\% \quad \Rightarrow \quad \xi \geq 0.59$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{K}} \geq 0.59 \quad \Rightarrow \quad K \leq \frac{1}{(0.59)^2} \quad \Rightarrow \quad K \leq 2.87$$

**Exercice n°5**

Soit le système à retour unitaire dont la FTBO est :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p(p+20)} \Rightarrow FTBF(p) = \frac{1}{\frac{1}{K}p^2 + \frac{20}{K}p + 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{20}{K} \\ \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1}{K} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{10}{\sqrt{K}} \\ \omega_n = \sqrt{K} \end{cases}$$

a) Calculons K afin d'obtenir un système avec un amortissement critique.

$$\text{Amortissement critique : } \xi = 1 \Rightarrow \begin{cases} K = 100 \\ \omega_n = 10 \text{ rd / s} \end{cases}$$

b) Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement idéal ( $\beta = 45^\circ$ ).

$$\text{Amortissement idéal : } \beta = 45^\circ \Rightarrow \xi = \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \Rightarrow \begin{cases} K = 200 \\ \omega_n = 10\sqrt{2} \text{ rd / s} \end{cases}$$